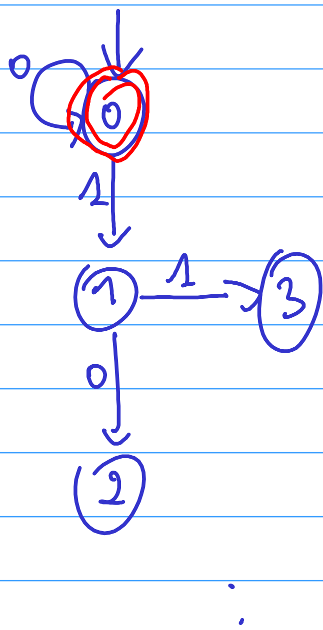
Exercice et Corrigé.

Exercice : donner un automate (déterministe) qui reconnaît le langage associé au problème « $n \bmod 7 = 0$ »
(indication : on lit le nombre n en binaire de la gauche vers la droite et on rappelle que si n s'écrit n' puis b où n' est un nombre en binaire et b un bit, alors $n = 2n' + b$)

$n' \bmod 7$	b	$n \bmod 7$
0	0	0
	1	1
1	0	2
	1	3
2	0	4
	1	5
3	0	6
	1	0
4	0	1
	1	2
5	0	3
	1	4
6	0	5
	1	6



etc.

exercice : montrer que le langage associé au problème $\{0^a 1^a \mid a \geq 0\}$ n'est pas régulier. Autrement dit, qu'il n'existe pas d'automate qui décide ce problème.

(Par l'absurde). Supposons qu'il existe un tel automate A avec q états. Alors le mot $0^q 1^q$ est accepté par A.
Lors de l'exécution de A sur ce mot, on repasse forcément deux fois par le même état. Il y a donc une boucle et le mot $0^q 1^q$ s'écrit sous la forme $p\,m\,s$.
Le mot $p m^2 s$ est aussi accepté par A
Ce mot a : - soit un nombre différent de 0 et de 1
- soit un motif m de la forme $0^e 1^e$
auquel cas $p m^2 s = 0^{q-e} 0^e 1^e 0^e 1^e 1^{q-e}$
Dans les deux cas le mot $p m^2 s$ n'appartient pas au langage.

exercice : Montrer que le langage $\{1^a 0^a 1^a \mid a \in \mathbb{N}\}$ n'est pas décidable par un automate à pile déterministe.

preuve similaire. On « pompe » sur l'ensemble
États × tête de pile

et il y a un peu plus de cas à regarder

Mais le principe reste le même.

exercice : donner les restrictions sur δ de tel sorte que la tête de lecture ne « tombe » jamais du ruban en allant au delà du symbole $\triangleright$.

On force l'état s, si $\delta(\triangleright, s) = (s', y, D)$ alors

- $y = \triangleright$; et
- $D \neq \Leftarrow$

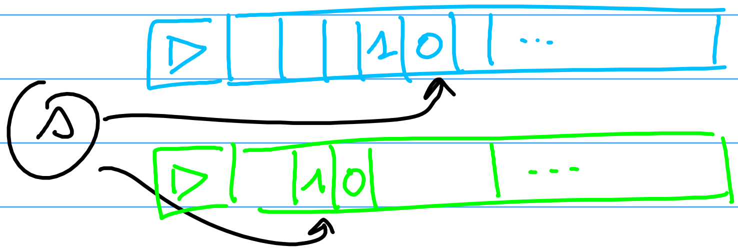
exercice : donner la table de transition de la fonction « shift » qui lit en entrée un nombre n en binaire et écrit en sortie le nombre n précédé d'un symbole blanc. Par exemple ; entrée : 0010 ; sortie : ⊔0010.

Table de transition de la fonction shift.

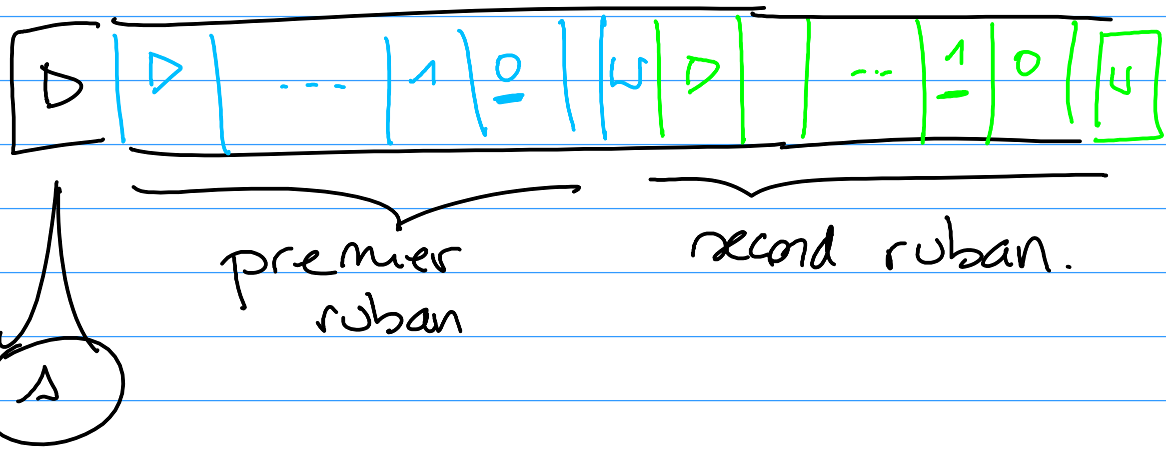
S	Σ	$\bar{S}$	Σ	mvt.	
s_0	$\triangleright$	s_0	$\triangleright$	$\Rightarrow$	
s_0	0	q_0	⊔	$\Rightarrow$	
s_0	1	q_1	⊔	$\Rightarrow$	
s_0	⊔	s_h	⊔	•	
q_0	0	q_0	0	$\Rightarrow$	
q_0	1	q_1	0	$\Rightarrow$	
q_0	⊔	s_h	0	•	retour
q_1	0	q_0	1	$\Rightarrow$	
q_1	1	q_1	1	$\Rightarrow$	retour.
q_1	⊔	s_h	1	•	
retour	0, 1	retour	0, 1	$\Leftarrow$	
retour	⊔	s_h	⊔	•	

exercice : Montrer que toute machine de Turing à plusieurs rubans M^+ peut être simulée par une machine de Turing à un seul ruban.

la machine à 2 rubans



Machine à 1 ruban.



1er temps : trouve les entrées de la fonction de transition de la machine M^+
balayage vers la droite et je mets en mémoire dans mon état les symboles "des têtes" (sur l'exemple $\underline{0}$ et $\underline{1}$).

Si nécessaire shift du ruban pour conserver un symbole ⊔ avant ▷.

2nd temps : effectue les changements en fonction de δ^+ (écris les nouvelles valeurs + je déplace les symboles soulignés pour simuler la position des têtes).

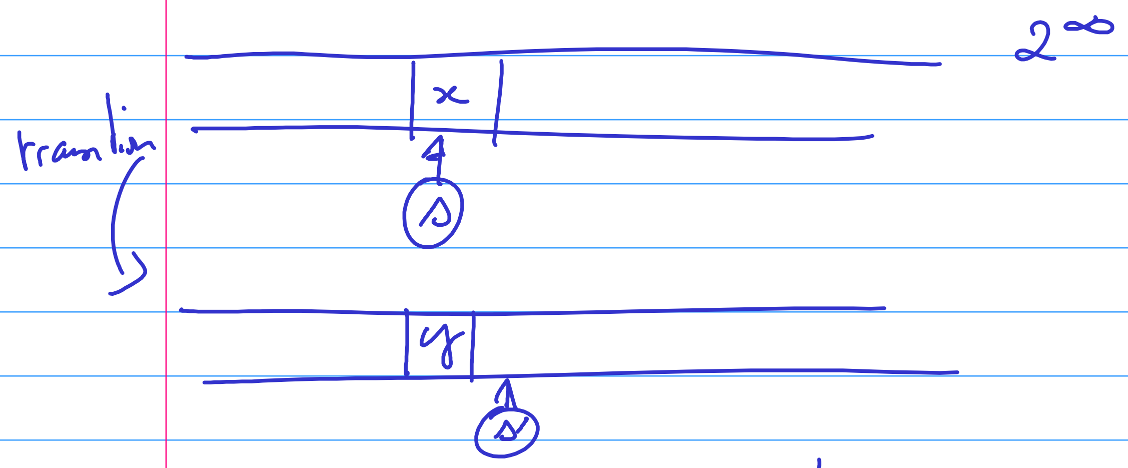
3ème temps : reviens me positionner sur le symbole ▷

exercice : Montrer que toute machine de Turing à un seul ruban infini des deux côtés peut être simulée par une machine de Turing à un seul ruban semi-infini (c'est-à-dire infini à droite seulement).

On suppose (pour simplifier) que la nouvelle machine contient l'entrée sous une forme légèrement différente.

e.g 0010 devient $\begin{matrix}0&0&1&0\\ \sqcup&\sqcup&\sqcup&\sqcup\end{matrix}$.

Soit $\delta^{2\infty}$ la fonction de transition de la machine à simuler et $\delta^{1\infty}$ celle de la nouvelle machine.



2 cas.
- la tête est à droite de la position initiale $+s$
- ——— gauche ———. $-s$

si $\delta^{2\infty}(s,x) = (s', y, \Rightarrow)$ alors :

$$\delta^{1\infty}\left(+s, \begin{pmatrix}x\\x'\end{pmatrix}\right) := \left(+s', \begin{pmatrix}y\\x'\end{pmatrix}, \Rightarrow\right) \quad \text{pour tout } x' \in \Sigma.$$

$$\delta^{1\infty}\left(-s, \begin{pmatrix}x'\\x\end{pmatrix}\right) := \left(-s', \begin{pmatrix}x'\\y\end{pmatrix}, \Leftarrow\right)$$

Si $\delta^{200}(s,x) = (s', y, \Leftarrow)$ alors :

$$\delta^{100}\left(+s, \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}\right) := \left(+s', \begin{pmatrix} y \\ x' \end{pmatrix}, \Leftarrow\right) \quad \text{pour tout } x' \in \Sigma.$$

$$\delta^{100}\left(-s, \begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix}\right) := \left(-s', \begin{pmatrix} x' \\ y \end{pmatrix}, \Rightarrow\right)$$

Si $\delta^{200}(s,x) = (s', y, \bullet)$ alors :

$$\delta^{100}\left(+s, \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}\right) := \left(+s', \begin{pmatrix} y \\ x' \end{pmatrix}, \bullet\right) \quad \text{pour tout } x' \in \Sigma.$$

$$\delta^{100}\left(-s, \begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix}\right) := \left(-s', \begin{pmatrix} x' \\ y \end{pmatrix}, \bullet\right)$$

Si je lis le symbole de début $\triangleright$, je change de « ruban » (ruban virtuel).

$$\delta^{100}(+s, \triangleright) := (-s, \triangleright, \Rightarrow).$$

$$\delta^{100}(-s, \triangleright) := (+s, \triangleright, \Rightarrow).$$

exercice :

a/- simuler un automate à 2 piles avec une MdT

b/- et vice versa.

exercice : prouver ce théorème.

théorème :

Soit M^+ une machine de Turing à k rubans en temps $f(n)$.
Il existe une machine de Turing à un ruban M
qui est en temps $O(f^2(n))$ et qui simule M^+.
C'est-à-dire que pour toute entrée e,
$M^+(e) = M(e)$.

simulation :

• initialisation : $\sim 2f(n) + 4 = O(f(n))$.

pour chaque transition de la machine M^+, on a plusieurs "micro" transitions entre des "macro" transitions dans la machine M. de l'ordre de $O(f(n))$.

Soit $O(f^2(n))$ micro-étapes en tout.

exercice : prouver ce théorème.

Théorème : (accélération linéaire).

Soit $L \in Time(f(n))$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $L \in Time(f'(n))$

où $f'(n) = \varepsilon f(n) + n + 2$.