Synthèse de cascades de Poisson composées

J. Barral

May 11, 2004

Les cascades de Poisson composées ont été considérées par B. Mandelbrot afin de relacher la struture d'arbre sous-jascente aux cascades dites canoniques. Ainsi ces nouvelles mesures, construites sur $\mathbb{R}$, possèdent la propriété d'être invariantes en loi par translation, et dans le cas où elles sont auto-similaires, elles ont une propriété d'invariance en loi par changement continu d'échelle.

L'idée de construire de telles mesures comme limites de processus log-normaux afin de modéliser la turbulence remonte au début des années 70. B. Mandelbrot discuta alors un modèle obtenu comme limite d'une martingale à valeurs mesures, dont les densités forment des martingales log-normales. Ce modèle, trop compliqué pour être étudié rigoureusement avec les moyens de l'époque a été simplifié en cascade canonique. B. Mandelbrot, puis J.-P. Kahane et J. Peyrière ont alors établi un critère de non-dégénérescence de la martingale, ainsi que de finitude des moments d'ordre positif, et ils ont calculé la plus petite dimension d'un borélien portant tout ou partie de la mesure limite, c'est à dire le lieu de dissipation d'énergie. Dix ans plus tard (85), J.-P. Kahane a formalisé une théorie du chaos multiplicatif qui étudie les limites de certaines martingales à valeurs mesure, en particulier le cas log-normal.

Revenons au cascades de Poisson composées, qui sont un exemple de martingale illustrant le cadre de la théorie de J.-P. Kahane. Elles sont intimement liées au problème du recouvrement de la droite par des intervalles Poissoniens considéré par B. Mandelbrot, d'une part pour simplifier la résolution du problème de recouvrement du cercle posé par A. Dvoretzky, d'autre part pour créer des "poussières de Cantor" aléatoires et invariantes en loi par translation:

On considère par exemple S, un processus ponctuel de Poisson dans le demi-plan supérieur, d'intensité $\Lambda = \text{Lebesgue} \otimes \nu$, où ν est une mesure localement bornée et supportée par $(0, T]$ $(T > 0)$. Les intervalles $(s, s+\lambda)$, $(s, \lambda) \in S$ sont les intervalles du recouvrement Poissonien.

On s'intéresse à l'ensemble

$$\mathcal{R} = \mathbb{R}_+ \setminus \bigcup_{(s,\lambda)\in S} (s, s+\lambda).$$

Est-il vide presque sûrement ?

On peut donner une condition pour que la réponse à cette question soit négative en considérant un type de cascade de Poisson composée μ définie comme la limite de la martingale à valeur mesure

$$\mu_\varepsilon(dt) = \exp\big(\Lambda(C_\varepsilon(t))\big) \prod_{\substack{(s,\lambda)\in S\\ \lambda\geq\varepsilon}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+\setminus(s,s+\lambda)}(t)\, dt,$$

où $C_\varepsilon(t) = \{(s,\lambda):\ \lambda\in(\varepsilon,T),\ s\in(t-\lambda,t)\}$ et $\exp\big(-\Lambda(C_\varepsilon(t))\big)$ est la probabilité qu'il n'y ait aucun point de S dans $C_\varepsilon(t)$, c'est à dire que t ne soit recouvert par aucun intervalle du recouvrement de longueur $\geq\varepsilon$.

Il est clair que le support de μ est contenu dans $\mathcal{R}$. Donc si $\mu\neq 0$, $\mathcal{R}$ est non vide. Un calcul simple permet d'extraire une CNS pour que $\mu([0,1])$ soit borné dans L^2. On en déduit une condition suffisante de non recouvrement presque sûr. Il se trouve qu'elle est également nécessaire (c'est le théorème de Shepp (72)).

La construction précédente est un cas particulier de la construction générale des cascades de Poisson composées: à chaque point de S on associe maintenant une variable aléatoire $W_{s,\lambda}$, de sortes que les $W_{s,\lambda}$ aient été construites sur un espace probabilisé indépendant de S et que ces variables soient i.i.d. avec une variable W intégrable et positive. La cascade de Poisson composée μ est la limite faible presque sûre de la martingale à valeurs mesures

$$\mu_\varepsilon(dt) = \exp\Big(-\Lambda\big(C_\varepsilon(t)\big)\big(\mathbb{E}(W)-1\big)\Big) \prod_{\substack{(s,\lambda)\in S\\ \lambda\geq\varepsilon,\ t\in(s,s+\lambda)}} W_{s,\lambda}\ dt,$$

et la martingale construite précédemment correspond au cas $W=0$.

Le cas auto-similaire correspond à la construction où ν est un multiple de $\frac{d\lambda}{\lambda^2}$.

Des travaux récents donnent des conditions fines de non-dégénérescence de ces processus, et l'on peut décrire le caractère multifractal de ces martingales y compris dans le cas non auto-similaire (Barral, Fan, Mandelbrot). Il est souvent considéré comme une qualité remarquable du processus de donner des comportements multifractals même dans le cas où W est une constante. C'est alors une réminiscence de ce que le processus de Poisson S a lui même de telles propriétés, en ce sens que la multifractalité de μ est consécutive à celle du comportement asymptotique des nombres de recouvrements définis par

$$N_\varepsilon(t) = \sum_{\substack{(s,\lambda)\in S\\ \lambda\geq\varepsilon}} \mathbf{1}_{(s,s+\lambda)}(t).$$