

CASCADES INFINIMENT DIVISIBLES VOILÉES : AU-DELÀ DES LOIS DE PUISSANCE

P. Chainais ,

LIMOS UMR 6158,
ISIMA - Univ. Clermont II
Clermont-Ferrand

R. Riedi ,

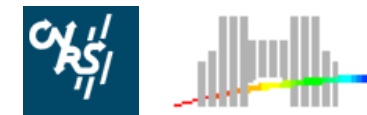
Dept of ECE,
Rice University,
Houston Texas, USA

P. Abry

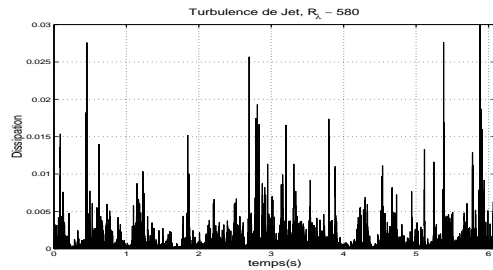
CNRS UMR 5672,
Laboratoire de Physique,
E.N.S. Lyon



RICE UNIVERSITY

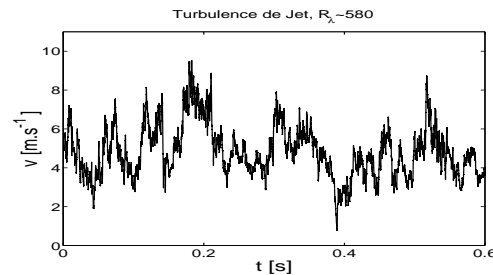


Lois d'échelle et Turbulence



dissipation

$$E \varepsilon_r^q \sim r^{\tau(q)}$$



vitesse

$$E |\delta v_r|^q \sim r^{q/3 + \tau(q/3)}$$

ANALYSE

formalisme multifractal ($\sim \tau^{\zeta(q)}$)
 casc. log-inf. div. ($H(q) \cdot n(\tau)$)
 cascades multiplicatives
 \Rightarrow phénoménologie
 (cascade de Richardson)

SIMULATION

cascades binomiales,
 coeff. ondelette, MRW...
 cascades multiplicatives
 \Rightarrow algorithmes
 (binomiale, ondelettes...)

Lois d'échelle infiniment divisibles

$$\mathbb{E} |\delta_\tau X|^q = c_q \exp[-H(q) \cdot n(\tau)]$$

✓ $n(\tau) = -\log \tau \implies \mathbb{E} |\delta_\tau X|^q = c_q \tau^{H(q)} \equiv c_q \tau^{\zeta(q)}$
(invariance d'échelle)

✓ $n(\tau) \neq -\log \tau \implies$ vers une analyse non-invariante d'échelle :

– turbulence Castaing et al. 1990

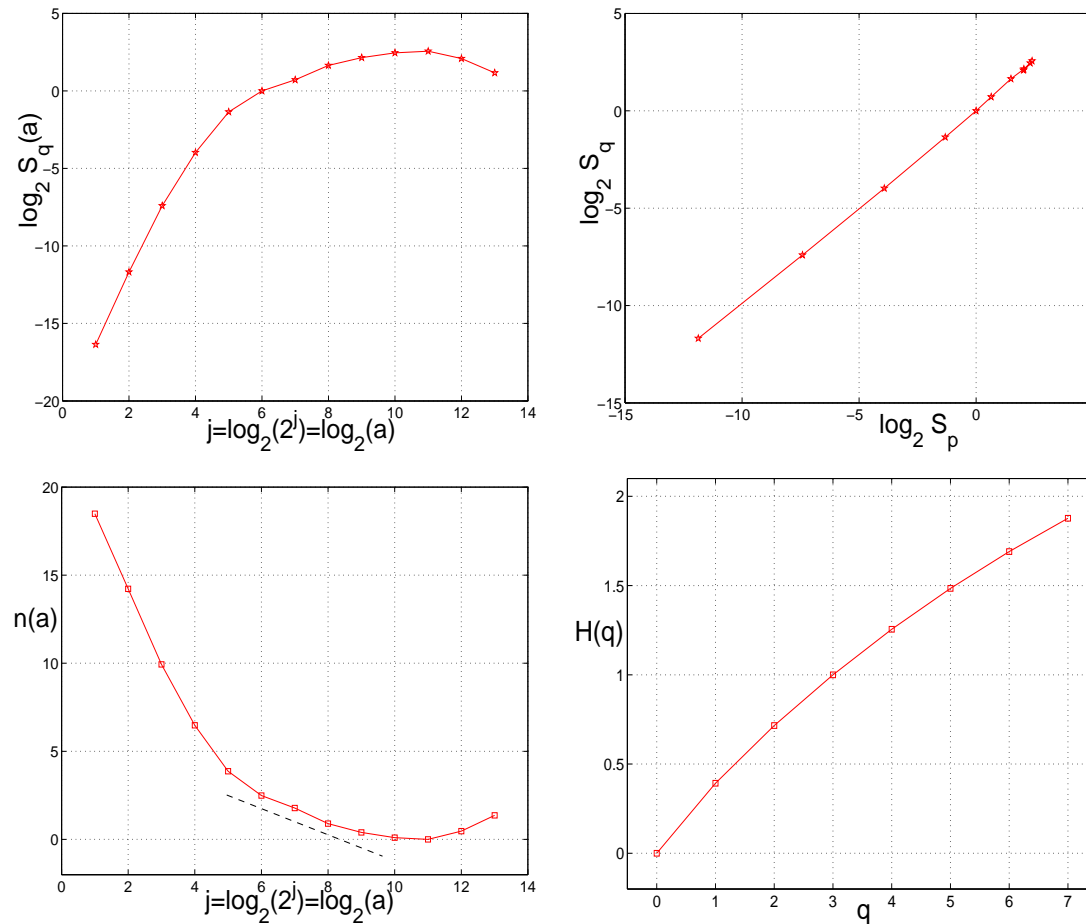
– trafic internet Veitch et al. 2000

✓ interprétation multiplicative

Comment construire un signal à lois d'échelle infiniment divisibles ?

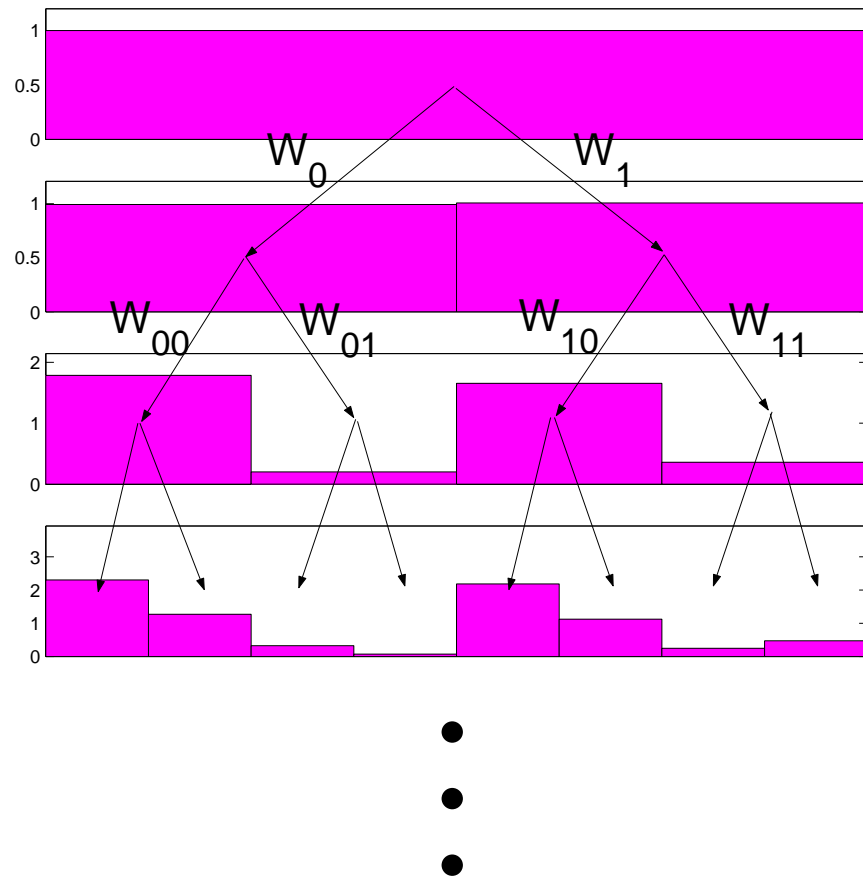
possédant de "bonnes propriétés" : *accroissements stationnaires*, etc. ...

Exemple : LID en turbulence

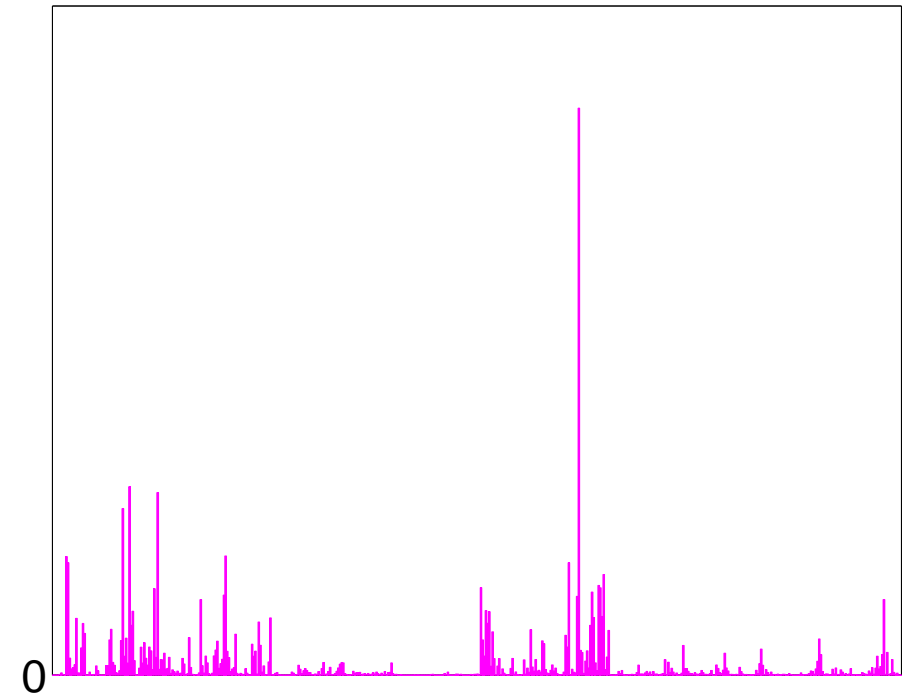


Principe des cascades binomiales

structure arborescente

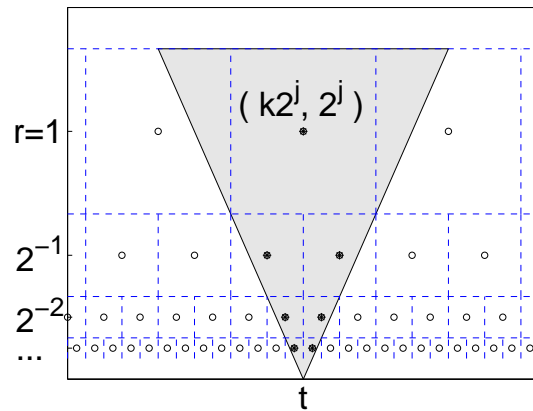


signal irrégulier



Des cascades binomiales aux cascades infiniment divisibles

binomiale

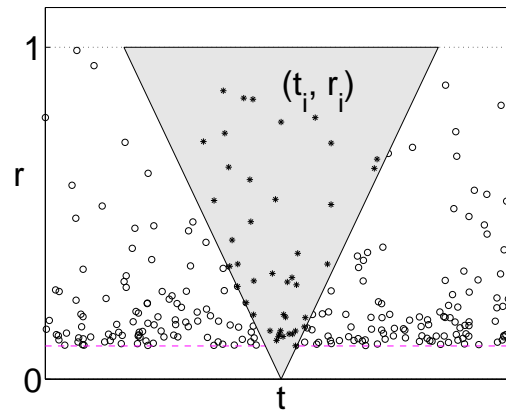


$$Q_r(t) = \prod_j \Lambda_j(t),$$

$r = 2^j$ seulement

Mandelbrot 1974

Poisson composée



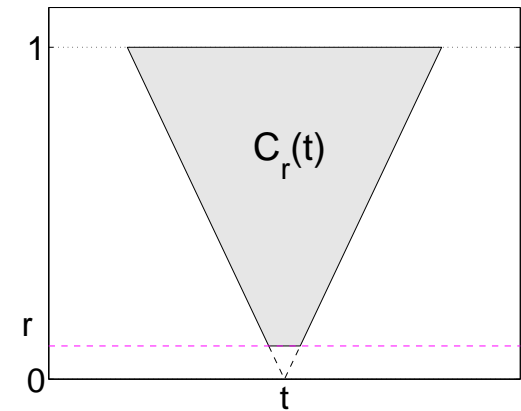
$$Q_r(t) \propto \prod_{(t_i, r_i)} W_i$$

t_i : uniforme \Rightarrow stationnaire

r_i : $1/r^2 \Rightarrow$ scaling

Barral & Mandelbrot 2002

Infiniment Divisible



$$Q_r(t) \propto \exp M(C_r(t))$$

CASCADE MULT.
CONTINUE

Schmitt & Marsan 2001

Muzy & Bacry 2002

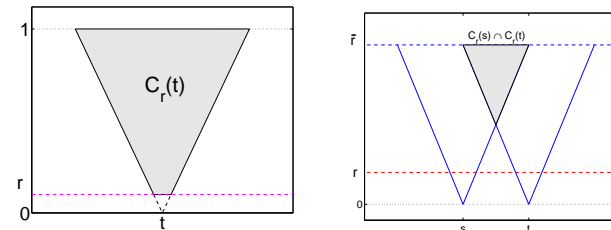
Ch. & Riedi & Abry 2003

Bruit log-infiniment divisible (IDC noise)

$\mathbf{M}(\mathcal{C}_r(\mathbf{t}))$: fct. génér. moments = $\exp[-m(\mathcal{C}_r) \rho(q)]$ (inv. éch. = $r^{\rho(q)}$)

- G = distr. infiniment divisible, fct. génér. moments $\tilde{G}(q) = e^{-\rho(q)}$,
- mesure positive $dm(t, r)$ [i. é. = $\frac{(1+\delta(1-r))dt dr}{r^2}$],

$$Q_r(t) = \frac{\exp[M(\mathcal{C}_r(t))]}{\mathbb{E}[\exp M(\mathcal{C}_r(t))]}$$



$\implies Q_r(t)$ est stationnaire

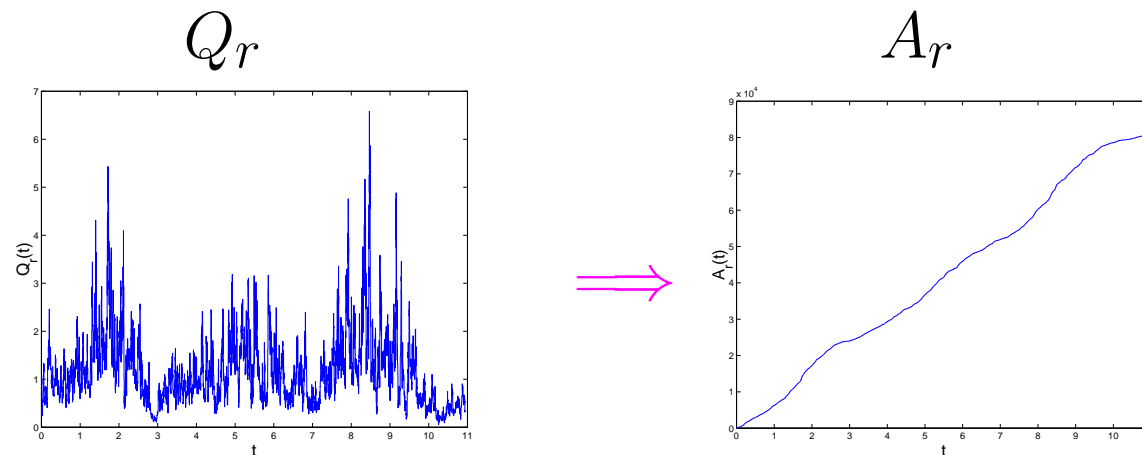
$$\varphi(q) = \rho(q) - q\rho(1) \implies \mathbb{E}[Q_r^q] = \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_r)]$$

$$[\text{i.é. } \mathbb{E}[Q_r^q] = e^{-\varphi(q)} \cdot r^{\varphi(q)}]$$

Mouvement log-infiniment divisible (IDC motion)

Pb : Q_r dégénère lorsque $r \rightarrow 0 \dots$

Solution : $A_r(t) = \int_0^t Q_r(s) ds \implies \mathbb{E}A_r(t) = t$



$A(t) = \lim_{r \rightarrow 0} A_r(t) \dots$ est à **accroissements stationnaires**

et $\mathbb{E}\delta_\tau A^q \sim \tau^q \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_\tau)]$

Marche aléatoire infiniment divisible (IDC random walk)

mouvement Brownien fractionnaire B_H , $A(t)$ une mesure Log. Inf. Div.,

$$V_H(t) = B_H(A(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Rappel $\left\{ \begin{array}{l} B_H \text{ est à accroissements stationnaires} \\ \forall t \in \mathbb{R}^+, \mathbb{E}|B_H(t)|^q = t^{qH} \cdot \mathbb{E}|B_H(1)|^q, \end{array} \right.$

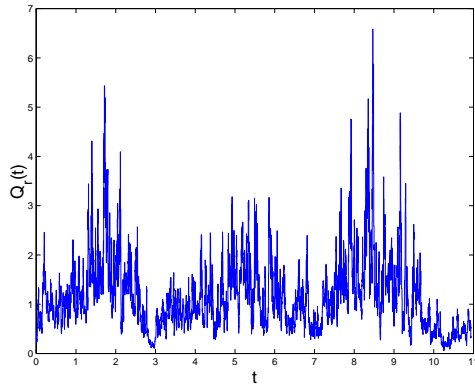
V_H est à accroissements stationnaires,
fluctuations positives/négatives,

et

$$\mathbb{E}|\delta_\tau V_H|^q \sim \tau^{qH} \exp[-\varphi(qH)m(\mathcal{C}_\tau)]$$

En résumé...

bruit
(densité)

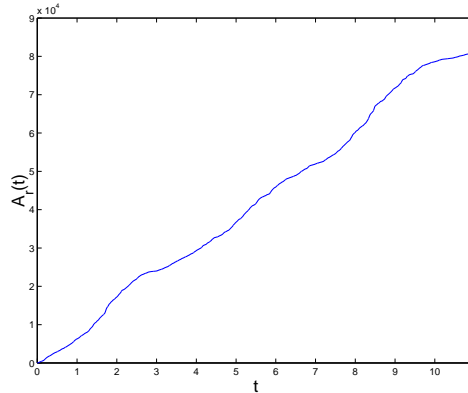


$$\mathbb{E}[Q_r^q]$$

||

$$\exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_r)]$$

mouvement
(mesure)

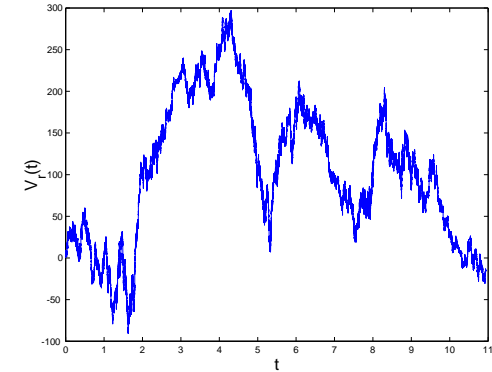


$$\mathbb{E}\delta_\tau A^q$$

\mathcal{N}

$$\tau^q \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_\tau)]$$

marche aléatoire



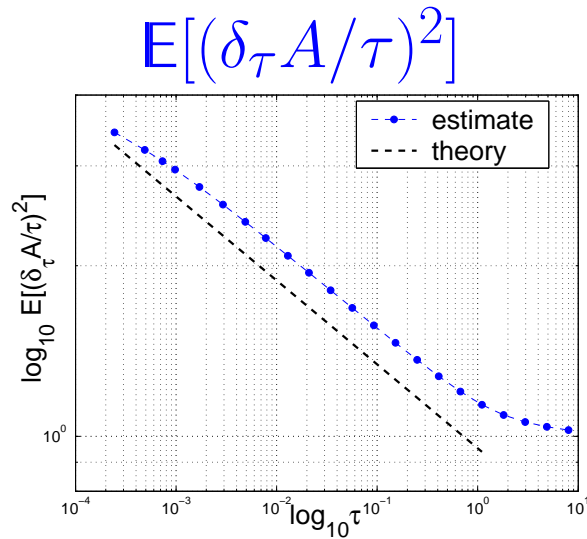
$$\mathbb{E}|\delta_\tau V_H|^q$$

\mathcal{N}

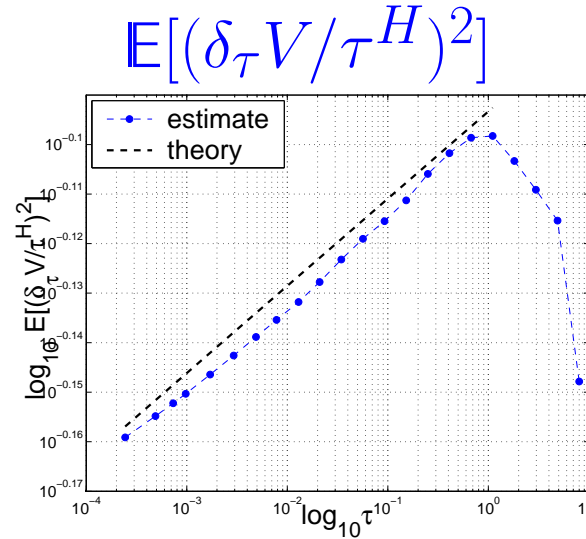
$$\tau^{qH} \exp[-\varphi(qH)m(\mathcal{C}_\tau)]$$

- temps continu ($t \in \mathbb{R}^+$), accroissements stationnaires, invariance d'échelle continue, $\forall \varphi(q)$ d'une distribution Inf. Div.,
- procédures MATLAB

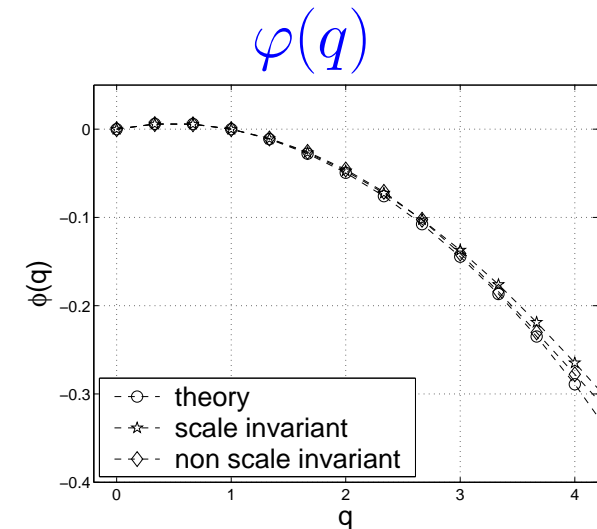
Invariance d'échelle et lois de puissance



$\varphi(2) \log \tau$



$\varphi(2H) \log \tau$



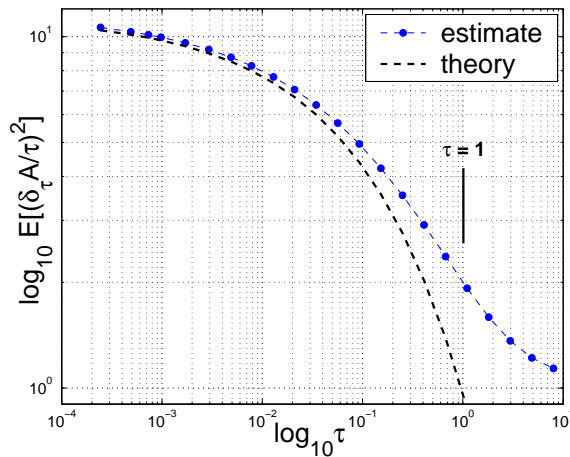
comportements **linéaires** dans diagrammes log-log



LOIS DE PUISSANCE

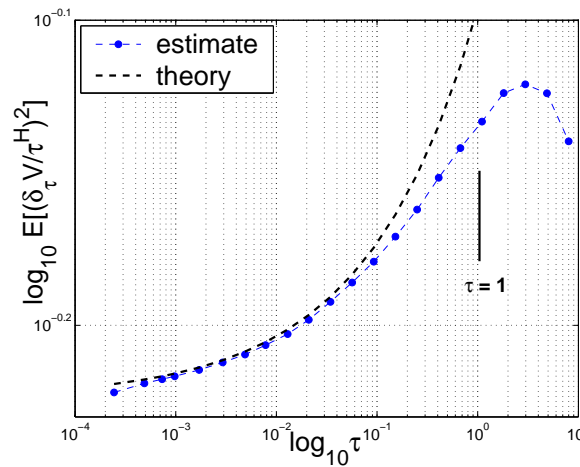
Au-delà des lois de puissance...

$$E[(\delta_\tau A/\tau)^2]$$



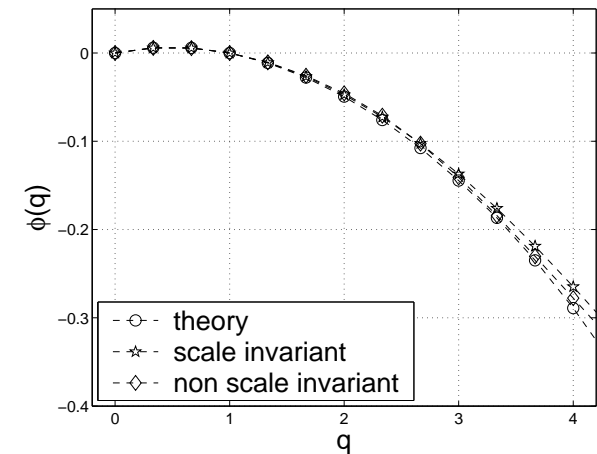
$$-\varphi(2)m(\mathcal{C}_\tau)$$

$$E[(\delta_\tau V/\tau^H)^2]$$



$$-\varphi(2H)m(\mathcal{C}_\tau)$$

$$\varphi(q)$$



comportements **non-linéaires** dans diagrammes log-log

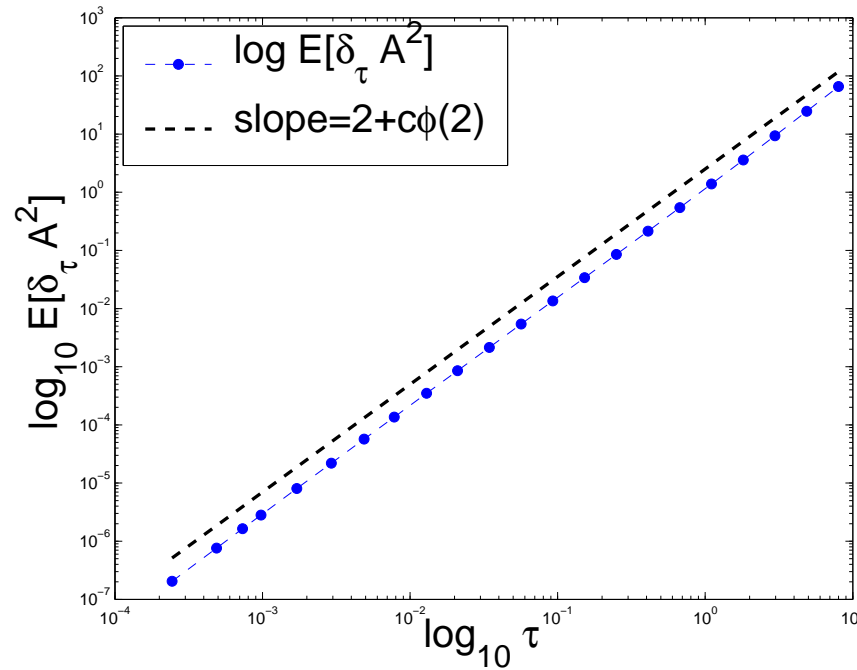


~~LOIS DE PUISSANCE~~

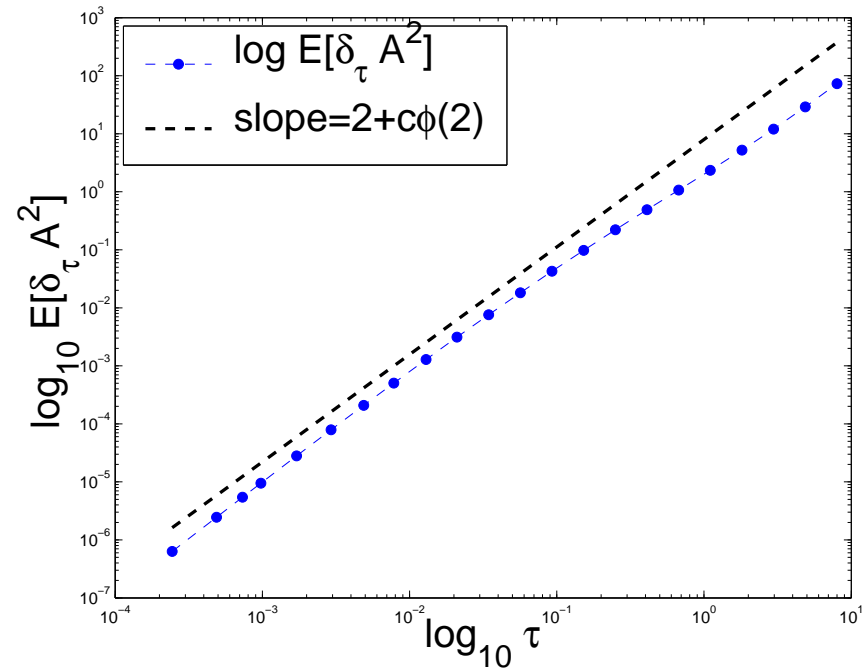
cascade voilée

$E\delta_\tau A^2$ multifractale / voilée

MULTIFRACTALE



VOILÉE



Exemple simple

$$dm(t, r) = \frac{dt dr}{r^{2+\beta}}$$

alors

$$m(\mathcal{C}_\tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{\sim} \begin{cases} \tau^{-\beta} & \text{si } \beta > 0, \\ -\ln \tau & \text{si } \beta = 0, \\ \frac{1 - \tau^{-\beta}}{\beta} \rightarrow \text{Cte} & \text{si } \beta < 0. \end{cases}$$

▼ Analyse Multifractale $\implies \lim_{\tau \rightarrow 0}$

donc le cas $\alpha > 1$ est sans intérêt en terme d'analyse multifractale ($\sim \tau^q$).

▲ Analyse LID $\implies \cancel{\lim_{\tau \rightarrow 0}}$

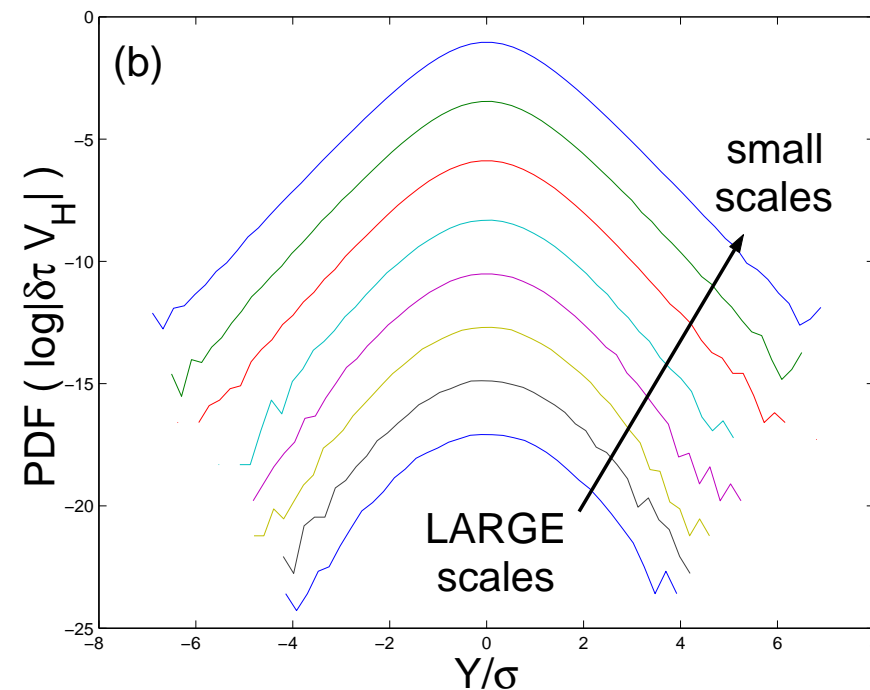
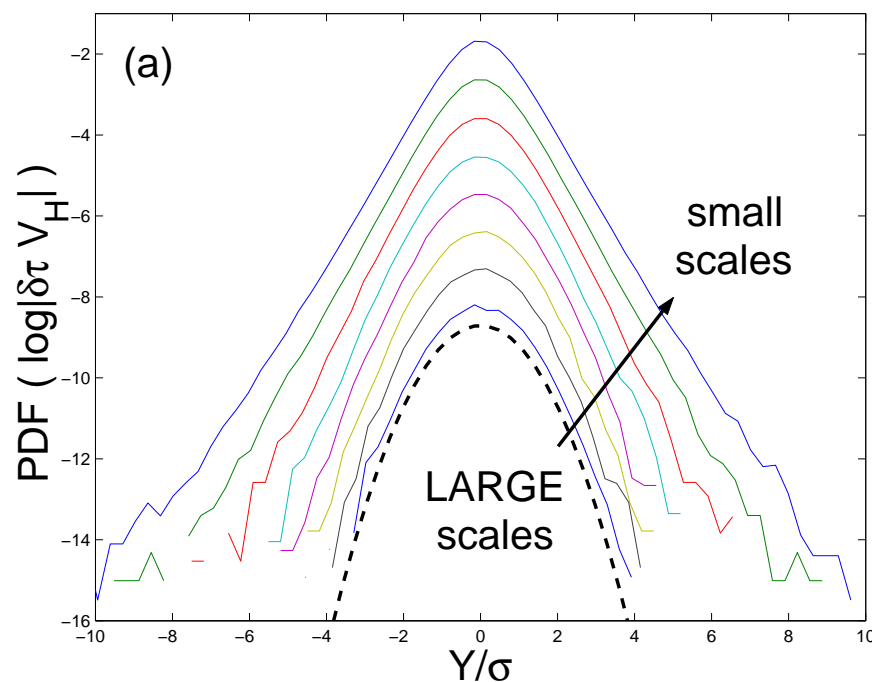
intérêt = évolution à travers les échelles

Evolution des densités de probabilité

MULTIFRACTALE

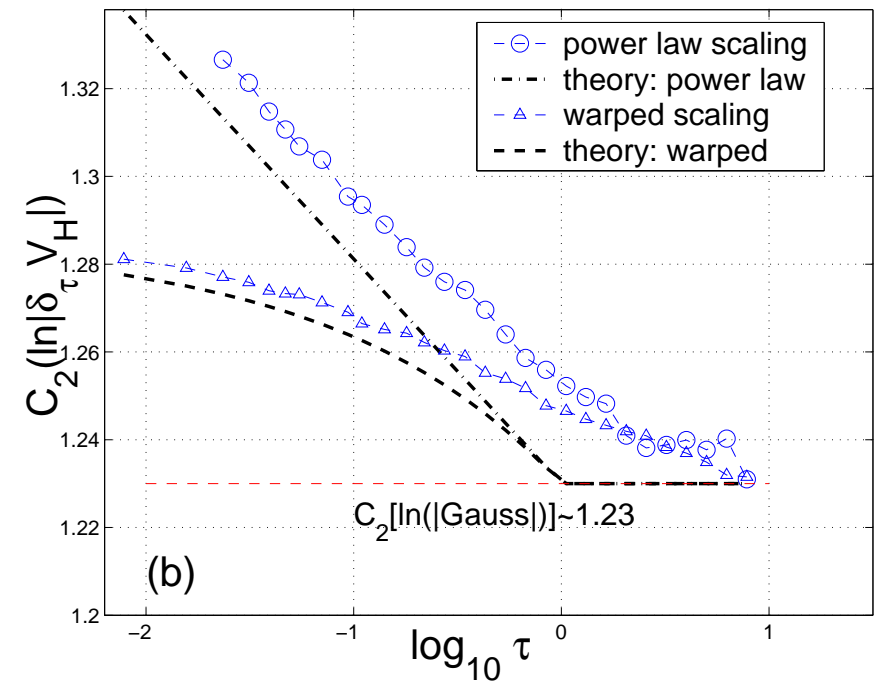
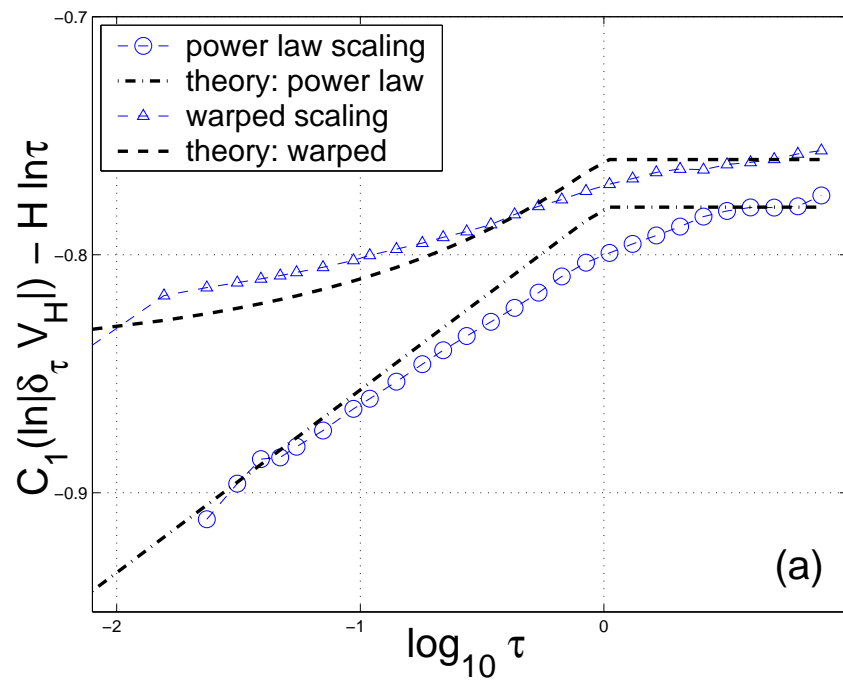
\neq

VOILÉE ($\beta = -0.4$)



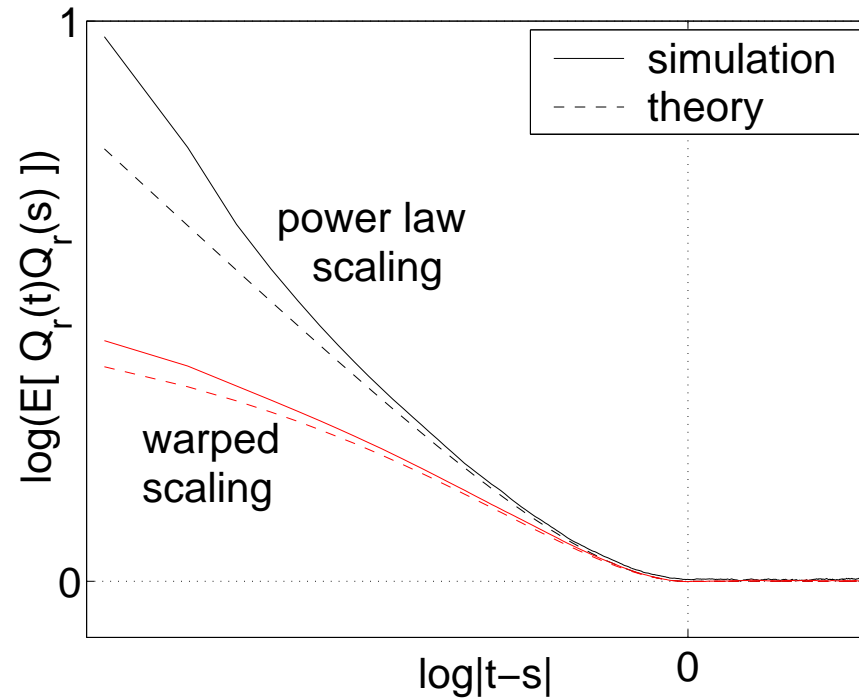
de gaussien vers *non gaussien* vers petites échelles
(ex : kurtosis...)

Cumulants du log des accroissements de V_H

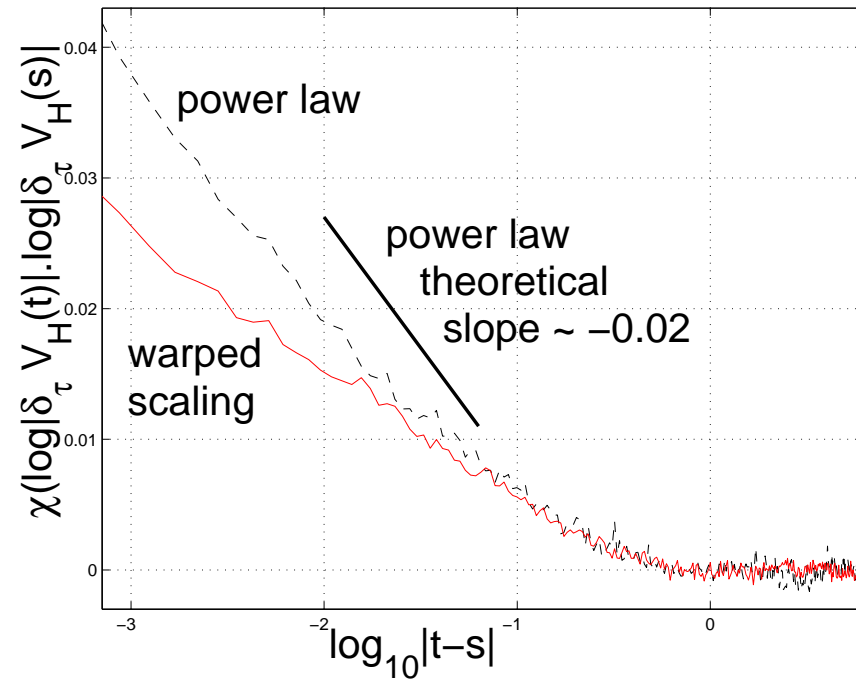


(a) $C_1 - H \ln \tau \simeq -H \varphi'(0) m(\mathcal{C}_\tau)$ (b) $C_2 \simeq -H^2 \varphi''(0) m(\mathcal{C}_\tau)$

Fonctions d'autocorrélation "voilées"



$$E[Q_r(t)Q_r(s)]$$



$$\text{Autocorrélation de } \ln |\delta_\tau V_H|$$

Bilan provisoire

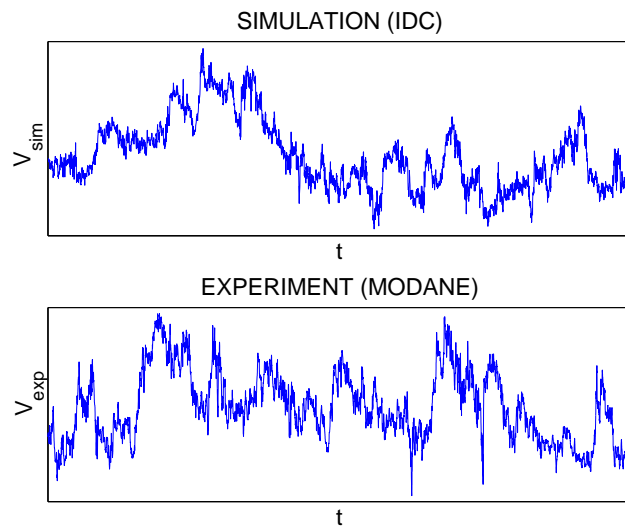
- ✓ modèles Log-Inf. Div. simulables,
- ✓ **cascades voilées** : *premier écart contrôlé aux lois de puissance,*
- ✓ **déception** : l'effet existe mais reste faible,
- ✓ **applications** : turbulence, trafic internet, finance...

Et après ?

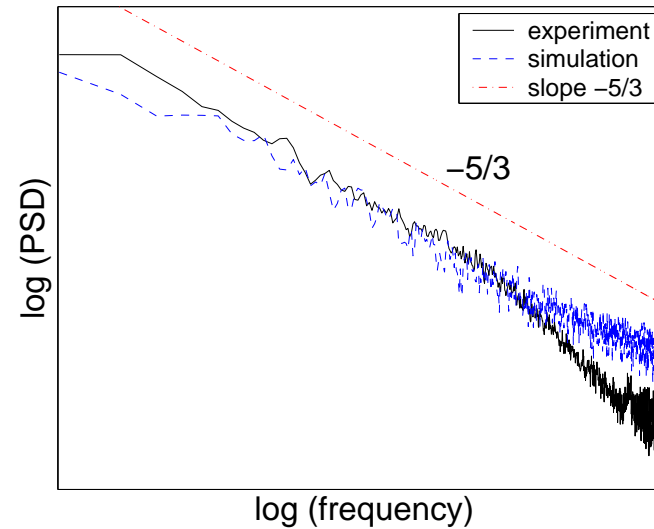
- ✓ encore plus loin des lois de puissance, c'est possible ?...
- ✓ d'autres pistes que les CLID ? (pb de l'intégration...)
- ✓ skewness ?
- ✓ analyse : estimation, prédiction...
- ✓ CLID multidimensionnelles
- ✓ banque d'algorithmes de synthèse.

CLID vs modèle She-Lévêque et signal "Modane"

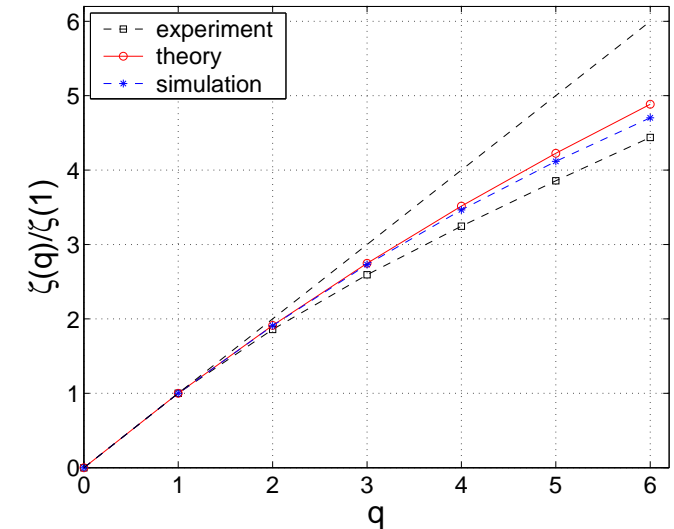
≡ marche aléatoire Log-Inf. Div. V_H versus vitesse v



V_H versus Modane



Spectres



Exposants $\zeta(q)$

⇒ signal artificiel respectant le modèle de She-Lévêque